

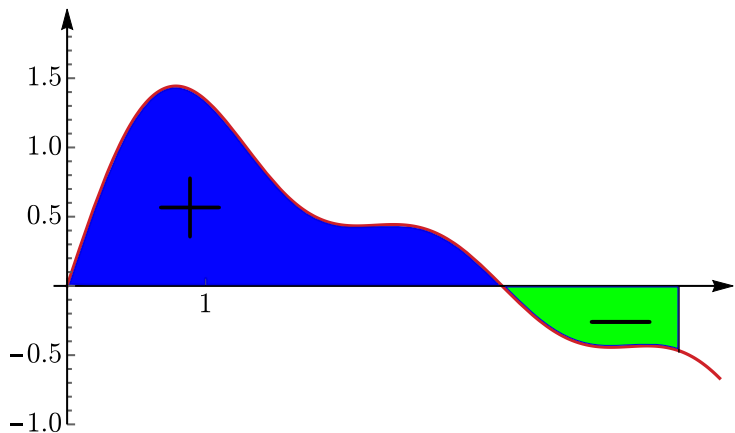
Parciális integrálás, Helyettesítéses integrálás, Racionális törtfüggvények integrálása

Nagy Noémi

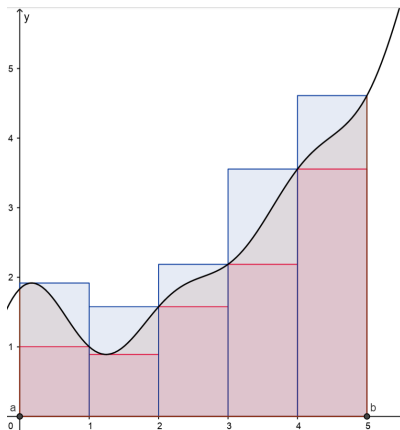
Farkas Lóránt és Sáfár Orsolya munkája alapján

2022/2023 ősz

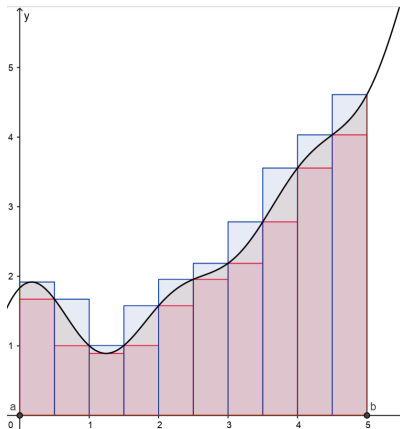
Előjeles terület



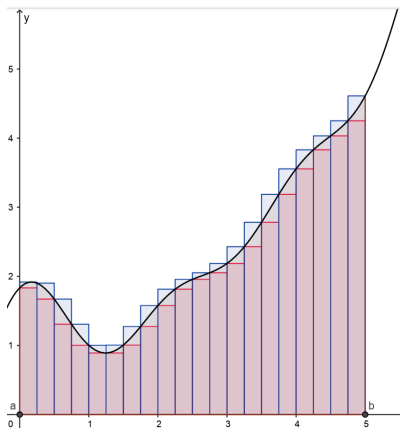
Riemann Integrál



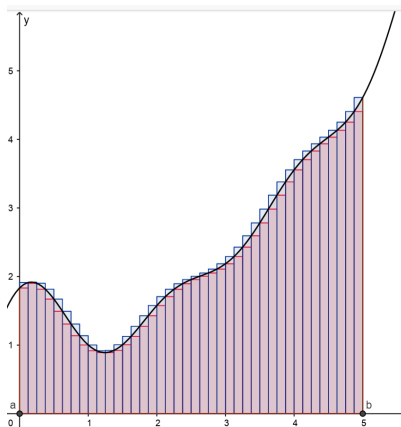
Riemann Integrál



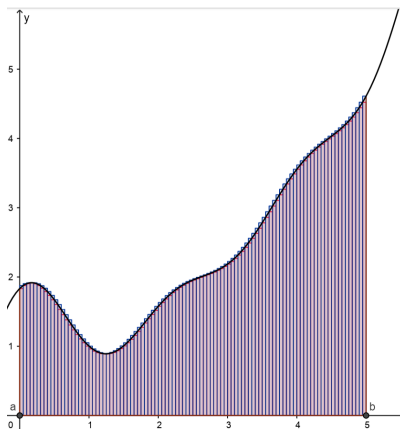
Riemann Integrál



Riemann Integrál



Riemann Integrál



Newton-Leibniz formula

Definíció

Az $f(x)$ függvény *primitív függvénye* $F(x)$, ha $F'(x) = f(x)$.

Newton-Leibniz formula

Definíció

Az $f(x)$ függvény *primitív függvénye* $F(x)$, ha $F'(x) = f(x)$.

Tétel (Newton-Leibniz formula)

Legyen $g(x) \in R_{[a,b]}$ és legyen $G(x)$ az $g(x)$ primitív függvénye, ekkor:

$$\int_a^b g(x) dx = G(b) - G(a)$$

Határozatlan integrál definíciója

Ha $F(x)$ primitív függvény akkor $F(x) + C$ is az (ahol C egy tetszőleges konstans jelöl). Az [Integrálszámítás első főtétele](#)ből tudjuk, hogy más primitív függvény nincsen.

Határozatlan integrál definíciója

Ha $F(x)$ primitív függvény akkor $F(x) + C$ is az (ahol C egy tetszőleges konstans jelöl). Az **Integrálszámítás első főtételéből** tudjuk, hogy más primitív függvény nincsen.

Definíció

Az $f(x)$ *határozatlan integrálján* az $f(x)$ összes primitív függvényének a halmazát értjük. Jele: $\int f(x) dx$.

Határozatlan integrál definíciója

Ha $F(x)$ primitív függvény akkor $F(x) + C$ is az (ahol C egy tetszőleges konstans jelöl). Az **Integrálszámítás első főtételéből** tudjuk, hogy más primitív függvény nincsen.

Definíció

Az $f(x)$ *határozatlan integrálján* az $f(x)$ összes primitív függvényének a halmazát értjük. Jele: $\int f(x) dx$.

Például:

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

Határozatlan integrál definíciója

Ha $F(x)$ primitív függvény akkor $F(x) + C$ is az (ahol C egy tetszőleges konstans jelöl). Az **Integrálszámítás első főtételéből** tudjuk, hogy más primitív függvény nincsen.

Definíció

Az $f(x)$ *határozatlan integrálján* az $f(x)$ összes primitív függvényének a halmazát értjük. Jele: $\int f(x) dx$.

Például:

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

Ezt ellenőrizni úgy lehet, hogy visszaderiváljuk tehát $(\frac{x^2}{2} + C)' = \frac{2x}{2}$

Parciális integrálás

Eddig, néhány összefüggés deriválásából kaptuk az alapintegrálokat. Nem feltétlenül tudtunk viszont olyan integrálokkal mit kezdeni, ahol a függvények szorozva vannak egymással:

$$\int f(x)g(x) dx = ?$$

Parciális integrálás

Eddig, néhány összefüggés deriválásából kaptuk az alapintegrálokat. Nem feltétlenül tudtunk viszont olyan integrálokkal mit kezdeni, ahol a függvények szorozva vannak egymással:

$$\int f(x)g(x) dx = ?$$

Az ilyen esetekben segíthet a parciális integrálás.

Képlete

A parciális integrálás képlete a szorzat függvény deriválási szabályából jön

Képlete

A parciális integrálás képlete a szorzat függvény deriválási szabályából jön

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x)v'(x)$$

Képlete

A parciális integrálás képlete a szorzat függvény deriválási szabályából jön

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x)v'(x)$$

Ezt átrendezve kapjuk, hogy:

$$u'(x) \cdot v(x) = (u(x) \cdot v(x))' - u(x)v'(x)$$

Képlete

A parciális integrálás képlete a szorzat függvény deriválási szabályából jön

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x)v'(x)$$

Ezt átrendezve kapjuk, hogy:

$$u'(x) \cdot v(x) = (u(x) \cdot v(x))' - u(x)v'(x)$$

Mindkét oldalt integrálva, és felhasználva, hogy az integrálás a deriválás inverz művelete, kapjuk:

Képlete

A parciális integrálás képlete a szorzat függvény deriválási szabályából jön

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x)v'(x)$$

Ezt átrendezve kapjuk, hogy:

$$u'(x) \cdot v(x) = (u(x) \cdot v(x))' - u(x)v'(x)$$

Mindkét oldalt integrálva, és felhasználva, hogy az integrálás a deriválás inverz művelete, kapjuk:

$$\int u'(x)v(x) dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x) dx$$

Példa

$$\int u'v \, dx = uv - \int uv' \, dx$$

$$\int x^2 \cdot e^{5x} \, dx =$$

Példa

$$\int u'v \, dx = uv - \int uv' \, dx$$

$$\int \underbrace{x^2}_{u'} \cdot \underbrace{e^{5x}}_v \, dx =$$

Példa

$$\int u'v \, dx = uv - \int uv' \, dx$$

$$\int \underbrace{x^2}_{u'} \cdot \underbrace{e^{5x}}_v \, dx = \underbrace{\frac{1}{3}x^3}_u \cdot \underbrace{e^{5x}}_v - \int \underbrace{\frac{1}{3}x^3}_u \cdot \underbrace{5e^{5x}}_{v'} \, dx$$

Példa

$$\int u'v \, dx = uv - \int uv' \, dx$$

$$\int \underbrace{x^2}_v \cdot \underbrace{e^{5x}}_{u'} \, dx =$$

Példa

$$\int u'v \, dx = uv - \int uv' \, dx$$

$$\int \underbrace{x^2}_v \cdot \underbrace{e^{5x}}_{u'} \, dx = \underbrace{x^2}_v \cdot \underbrace{\frac{1}{5}e^{5x}}_u - \int \underbrace{2x}_{v'} \cdot \underbrace{\frac{1}{5}e^{5x}}_u \, dx$$

Példa

$$\int u'v \, dx = uv - \int uv' \, dx$$

$$\int x^2 \cdot e^{5x} \, dx = x^2 \cdot \frac{1}{5} e^{5x} - \frac{2}{5} \int \underbrace{x}_v \cdot \underbrace{e^{5x}}_{u'} \, dx =$$

Példa

$$\int u'v \, dx = uv - \int uv' \, dx$$

$$\int x^2 \cdot e^{5x} \, dx = x^2 \cdot \frac{1}{5} e^{5x} - \frac{2}{5} \int \underbrace{x}_v \cdot \underbrace{e^{5x}}_{u'} \, dx =$$

$$= \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2}{5} \left(\frac{x e^{5x}}{5} - \frac{1}{5} \int e^{5x} \, dx \right) =$$

Példa

$$\int u'v \, dx = uv - \int uv' \, dx$$

$$\int x^2 \cdot e^{5x} \, dx = x^2 \cdot \frac{1}{5} e^{5x} - \frac{2}{5} \int \underbrace{x}_v \cdot \underbrace{e^{5x}}_{u'} \, dx =$$

$$= \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2}{5} \left(\frac{x e^{5x}}{5} - \frac{1}{5} \int e^{5x} \right) = \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2x e^{5x}}{25} + \frac{2 e^{5x}}{125} + C$$

Fajtái

Az alábbi 3 esetet kell felismerni:

Fajtái

Az alábbi 3 esetet kell felismerni:

Az első eset:

$$\int \text{polinom} \cdot \left\{ \begin{array}{c} e^{ax} \\ \sin(ax) \\ \cos(ax) \\ \sinh(ax) \\ \cosh(ax) \end{array} \right\} dx$$

Fajtái

Az alábbi 3 esetet kell felismerni:

Az első eset:

$$\int \text{polinom} \cdot \left\{ \begin{array}{l} e^{ax} \\ \sin(ax) \\ \cos(ax) \\ \sinh(ax) \\ \cosh(ax) \end{array} \right\} dx$$

Itt mindig a trigonometrikus/exponenciális az $u'(x)$ és a polinom a $v(x)$ (mert azt szeretném deriválni, így egyszerűbb alakra hozni).

Fajtái II

Az második eset:

$$\int \text{polinom} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \ln(ax) \\ \arcsin(ax) \\ \arccos(ax) \\ \arctan(ax) \\ \text{arcctg}(ax) \\ \text{arsinh}(ax) \\ \vdots \end{array} \right\} dx$$

Fajtái II

Az második eset:

$$\int \text{polinom} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \ln(ax) \\ \arcsin(ax) \\ \arccos(ax) \\ \arctan(ax) \\ \text{arcctg}(ax) \\ \text{arsinh}(ax) \\ \vdots \end{array} \right\} dx$$

Itt mivel csak a polinomnak ismertjük a primitív függvényét, így a polinom lesz az $u'(x)$.

Fajtái II

Az második eset:

$$\int \text{polinom} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \ln(ax) \\ \arcsin(ax) \\ \arccos(ax) \\ \arctan(ax) \\ \text{arcctg}(ax) \\ \text{arsinh}(ax) \\ \vdots \end{array} \right\} dx$$

Itt mivel csak a polinomnak ismertjük a primitív függvényét, így a polinom lesz az $u'(x)$.

Példák $\int \ln(x) dx = ?$, $\int \text{arsinh}(x) dx = ?$, $\int x \arctan(x) dx = ?$

Fajtái III

A harmadik eset:

$$\int \left\{ \begin{array}{c} e^{ax} \\ \sin(ax) \\ \cos(ax) \\ \sinh(ax) \\ \cosh(ax) \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} e^{bx} \\ \sin(bx) \\ \cos(bx) \\ \sinh(bx) \\ \cosh(bx) \end{array} \right\} dx$$

Fajtai III

A harmadik eset:

$$\int \left\{ \begin{array}{c} e^{ax} \\ \sin(ax) \\ \cos(ax) \\ \sinh(ax) \\ \cosh(ax) \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} e^{bx} \\ \sin(bx) \\ \cos(bx) \\ \sinh(bx) \\ \cosh(bx) \end{array} \right\} dx$$

Kétszer kell parciálisan integrálni. Példa: $\int e^{3x} \sin(2x) dx = ?$

Fajtái III

A harmadik eset:

$$\int \left\{ \begin{array}{c} e^{ax} \\ \sin(ax) \\ \cos(ax) \\ \sinh(ax) \\ \cosh(ax) \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} e^{bx} \\ \sin(bx) \\ \cos(bx) \\ \sinh(bx) \\ \cosh(bx) \end{array} \right\} dx$$

Kétszer kell parciálisan integrálni. Példa: $\int e^{3x} \sin(2x) dx = ?$

Bizonyos párosításokat egyszerűbben is integrálhatunk. (ld. Kónya)

Mik is a racionális törtfüggvények?

A polinomokat az

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

alakú függvényeket, szokták racionális egészfüggvényként is hívni.

Mik is a racionális törtfüggvények?

A polinomokat az

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

alakú függvényeket, szokták racionális egészfüggvényként is hívni.

Emiatt a racionális törtfüggvényeknek a

$$f(x) = \frac{\text{polinom}}{\text{másik polinom}}$$

alakú függvényeket hívjuk.

Mik is a racionális törtfüggvények?

A polinomokat az

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

alakú függvényeket, szokták racionális egészfüggvényként is hívni.

Emiatt a racionális törtfüggvényeknek a

$$f(x) = \frac{\text{polinom}}{\text{másik polinom}}$$

alakú függvényeket hívjuk.

Ha a számlálóban lévő polinom magasabb vagy egyenlő fokszámú mint a nevezőben lévő, akkor azt mondjuk rá, hogy **áltört**. Ekkor

$$\frac{\text{polinom1}}{\text{másik polinom}} = \text{polinom2} + \frac{\text{polinom3}}{\text{másik polinom}}$$

átalakítás hajtható végre, ahol a végén kapott tört nem áltört.

Az algebra alaptétele

Az Algebra Alaptétele azt mondja ki, hogy minden polinom felbontható első és másodfokú polinomok szorzatára. Tehát

$$\begin{aligned}
 Q(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \\
 &= a_n \left((x - x_1)^{\alpha_1} (x - x_2)^{\alpha_2} \dots (x - x_l)^{\alpha_l} \cdot (x^2 + b_1 x + c_1)^{\beta_1} \cdot (x^2 + b_2 x + c_2)^{\beta_2} \dots (x^2 + b_k x + c_k)^{\beta_k} \right)
 \end{aligned}$$

Az algebra alaptétele

Az Algebra Alaptétele azt mondja ki, hogy minden polinom felbontható első és másodfokú polinomok szorzatára. Tehát

$$\begin{aligned}
 Q(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \\
 &= a_n \left((x - x_1)^{\alpha_1} (x - x_2)^{\alpha_2} \dots (x - x_l)^{\alpha_l} \cdot (x^2 + b_1 x + c_1)^{\beta_1} \cdot (x^2 + b_2 x + c_2)^{\beta_2} \dots (x^2 + b_k x + c_k)^{\beta_k} \right)
 \end{aligned}$$

Ahol $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_l + 2(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_k) = n$

Az algebra alaptétele

Az Algebra Alaptétele azt mondja ki, hogy minden polinom felbontható első és másodfokú polinomok szorzatára. Tehát

$$\begin{aligned} Q(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \\ &= a_n \left((x - x_1)^{\alpha_1} (x - x_2)^{\alpha_2} \dots (x - x_l)^{\alpha_l} \cdot (x^2 + b_1 x + c_1)^{\beta_1} \cdot (x^2 + b_2 x + c_2)^{\beta_2} \dots (x^2 + b_k x + c_k)^{\beta_k} \right) \end{aligned}$$

Ahol $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_l + 2(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_k) = n$

Mivel ezen másodfokú polinomoknak nincs valós gyöke, de van két komplex gyöke (amik egymás konjugáltjai), így jön ki az hogy minden n -ed fokú polinomnak n gyöke van. Ezt is szokták az Algebra Alaptételének hívni.

Parciális törtekre bontás

$$Q(x) = a_n \left((x - x_1)^{\alpha_1} (x - x_2)^{\alpha_2} \dots (x - x_l)^{\alpha_l} \cdot (x^2 + b_1x + c_1)^{\beta_1} \cdot (x^2 + b_2x + c_2)^{\beta_2} \dots (x^2 + b_kx + c_k)^{\beta_k} \right)$$

Parciális törtekre bontás

$$Q(x) = a_n \left((x - x_1)^{\alpha_1} (x - x_2)^{\alpha_2} \dots (x - x_l)^{\alpha_l} \cdot (x^2 + b_1x + c_1)^{\beta_1} \cdot (x^2 + b_2x + c_2)^{\beta_2} \dots (x^2 + b_kx + c_k)^{\beta_k} \right)$$

Ha $P(x)$ foka kisebb mint n ($Q(x)$ foka) akkor léteznek olyan $r_{i,j}$, $s_{i,j}$, $t_{i,j}$ állandók melyre:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{r_{1,1}}{(x - x_1)} + \frac{r_{1,2}}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{r_{1,\alpha_1}}{(x - x_1)^{\alpha_1}} + \dots + \\ &+ \frac{r_{l,1}}{(x - x_l)} + \frac{r_{l,2}}{(x - x_l)^2} + \dots + \frac{r_{l,\alpha_l}}{(x - x_l)^{\alpha_l}} + \frac{s_{1,1}x + t_{1,1}}{x^2 - b_1x + c_1} + \\ &+ \frac{s_{1,2}x + t_{1,2}}{(x^2 - b_1x + c_1)^2} + \dots + \frac{s_{1,\beta_1}x + t_{1,\beta_1}}{(x^2 - b_1x + c_1)^{\beta_1}} + \dots \end{aligned}$$

Parciális törtekre bontás

$$Q(x) = a_n \left((x - x_1)^{\alpha_1} (x - x_2)^{\alpha_2} \dots (x - x_l)^{\alpha_l} \cdot (x^2 + b_1x + c_1)^{\beta_1} \cdot (x^2 + b_2x + c_2)^{\beta_2} \dots (x^2 + b_kx + c_k)^{\beta_k} \right)$$

Ha $P(x)$ foka kisebb mint n ($Q(x)$ foka) akkor léteznek olyan $r_{i,j}$, $s_{i,j}$, $t_{i,j}$ állandók melyre:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{r_{1,1}}{(x - x_1)} + \frac{r_{1,2}}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{r_{1,\alpha_1}}{(x - x_1)^{\alpha_1}} + \dots + \\ & + \frac{r_{l,1}}{(x - x_l)} + \frac{r_{l,2}}{(x - x_l)^2} + \dots + \frac{r_{l,\alpha_l}}{(x - x_l)^{\alpha_l}} + \frac{s_{1,1}x + t_{1,1}}{x^2 - b_1x + c_1} + \\ & + \frac{s_{1,2}x + t_{1,2}}{(x^2 - b_1x + c_1)^2} + \dots + \frac{s_{1,\beta_1}x + t_{1,\beta_1}}{(x^2 - b_1x + c_1)^{\beta_1}} + \dots \end{aligned}$$

A jobboldalon szereplő törteket **parciális törteknek** nevezzük. Ezeket már tanult módon tudjuk integrálni.

Példa

$$X = \int \frac{2x^4 + 4x^3 - 17x^2 - 2x + 9}{x^2 + 2x - 8} dx = ?$$

Látjuk, hogy áltört: $(2x^4 + 4x^3 - 17x^2 - 2x + 9) : (x^2 + 2x - 8) = 2x^2 - 1$
maradék 1.

Példa

$$X = \int \frac{2x^4 + 4x^3 - 17x^2 - 2x + 9}{x^2 + 2x - 8} dx = ?$$

Látjuk, hogy áltört: $(2x^4 + 4x^3 - 17x^2 - 2x + 9) : (x^2 + 2x - 8) = 2x^2 - 1$
maradék 1.

$$X = \int \frac{(x^2 + 2x - 8)(2x^2 - 1)}{(x^2 + 2x - 8)} + \frac{1}{x^2 + 2x - 8} dx =$$

Példa

$$X = \int \frac{2x^4 + 4x^3 - 17x^2 - 2x + 9}{x^2 + 2x - 8} dx = ?$$

Látjuk, hogy áltört: $(2x^4 + 4x^3 - 17x^2 - 2x + 9) : (x^2 + 2x - 8) = 2x^2 - 1$
maradék 1.

$$\begin{aligned} X &= \int \frac{(x^2 + 2x - 8)(2x^2 - 1)}{(x^2 + 2x - 8)} + \frac{1}{x^2 + 2x - 8} dx = \\ &= \int 2x^2 - 1 + \frac{1}{x^2 + 2x - 8} dx = \end{aligned}$$

Példa

$$X = \int \frac{2x^4 + 4x^3 - 17x^2 - 2x + 9}{x^2 + 2x - 8} dx = ?$$

Látjuk, hogy áltört: $(2x^4 + 4x^3 - 17x^2 - 2x + 9) : (x^2 + 2x - 8) = 2x^2 - 1$
maradék 1.

$$\begin{aligned} X &= \int \frac{(x^2 + 2x - 8)(2x^2 - 1)}{(x^2 + 2x - 8)} + \frac{1}{x^2 + 2x - 8} dx = \\ &= \int 2x^2 - 1 + \frac{1}{x^2 + 2x - 8} dx = \frac{2}{3}x^3 - x + \int \frac{1}{x^2 + 2x - 8} dx \end{aligned}$$

Példa folytatása

$$X = \frac{2}{3}x^3 - x + \int \frac{1}{x^2 + 2x - 8} dx$$

Az $x^2 + 2x - 8$ gyöktényezős alakja: $(x + 4)(x - 2)$

Példa folytatása

$$X = \frac{2}{3}x^3 - x + \int \frac{1}{x^2 + 2x - 8} dx$$

Az $x^2 + 2x - 8$ gyöktényezős alakja: $(x + 4)(x - 2)$

Ekkor az előző tétel miatt:

$$\frac{1}{x^2 + 2x - 8} = \frac{A}{x + 4} + \frac{B}{x - 2}$$

Példa folytatása

$$X = \frac{2}{3}x^3 - x + \int \frac{1}{x^2 + 2x - 8} dx$$

Az $x^2 + 2x - 8$ gyöktényezős alakja: $(x + 4)(x - 2)$

Ekkor az előző tétel miatt:

$$\frac{1}{x^2 + 2x - 8} = \frac{A}{x + 4} + \frac{B}{x - 2}$$

Amit beszorozva $x^2 + 2x - 8$ -al kapjuk:

$$1 = A(x - 2) + B(x + 4)$$

Példa folytatása

$$X = \frac{2}{3}x^3 - x + \int \frac{1}{x^2 + 2x - 8} dx$$

Az $x^2 + 2x - 8$ gyöktényezős alakja: $(x + 4)(x - 2)$

Ekkor az előző tétel miatt:

$$\frac{1}{x^2 + 2x - 8} = \frac{A}{x + 4} + \frac{B}{x - 2}$$

Amit beszorozva $x^2 + 2x - 8$ -al kapjuk:

$$1 = A(x - 2) + B(x + 4)$$

Ahonnan: $A = -\frac{1}{6}$, $B = \frac{1}{6}$.

Példa folytatása II

Így:

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x - 8} dx = \int \frac{1}{6} \frac{1}{x - 2} - \frac{1}{6} \frac{1}{x + 4} dx = \frac{1}{6} (\ln |x - 2| - \ln |x + 4|) + C$$

Példa folytatása II

Így:

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x - 8} dx = \int \frac{1}{6} \frac{1}{x-2} - \frac{1}{6} \frac{1}{x+4} dx = \frac{1}{6} \left(\ln \frac{|x-2|}{|x+4|} \right) + C$$

Tehát

$$X = \frac{2}{3}x^3 - x + \int \frac{1}{x^2 + 2x - 8} dx = \frac{2x^3}{3} - x + \frac{1}{6} \ln \frac{|x-2|}{|x+4|} + C$$

Példa folytatása II

Így:

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x - 8} dx = \int \frac{1}{6} \frac{1}{x-2} - \frac{1}{6} \frac{1}{x+4} dx = \frac{1}{6} \left(\ln \frac{|x-2|}{|x+4|} \right) + C$$

Tehát

$$X = \frac{2}{3}x^3 - x + \int \frac{1}{x^2 + 2x - 8} dx = \frac{2x^3}{3} - x + \frac{1}{6} \ln \frac{|x-2|}{|x+4|} + C$$

További példa: $\int \frac{x+1}{x^3+x} dx = ?$ (Megoldás Könyvében!)

Helyettesítéses integrál

Tétel

Legyen $f \in C^0[a,b]$, $\varphi \in C^1[\alpha,\beta]$, φ szigorúan monoton és $\varphi(t) \in [a,b]$, ha $t \in [\alpha,\beta]$. Ekkor

$$\int f(x) dx \Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

Azaz

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

Ha $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ akkor

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

Példa:

Számítsuk ki:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = ?$$

Példa:

Számítsuk ki:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = ?$$

$x = \sin(t) = \varphi(t)$, $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t) = \cos(t)$, vagyis $dx = \cos(t) dt$, és $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 1$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(t)| \cos(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt =$$

Példa:

Számítsuk ki:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = ?$$

$x = \sin(t) = \varphi(t)$, $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t) = \cos(t)$, vagyis $dx = \cos(t) dt$, és $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 1$,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos(t) dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(t)| \cos(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2t) + 1}{2} dt = \left[\frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

Példa:

Számítsuk ki:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = ?$$

$x = \sin(t) = \varphi(t)$, $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t) = \cos(t)$, vagyis $dx = \cos(t) dt$, és
 $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 1$,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos(t) dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(t)| \cos(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2t) + 1}{2} dt = \left[\frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\sin(\pi) - \sin(0)}{4} + \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Példa:

Számítsuk ki:

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = ?$$

Példa:

Számítsuk ki:

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = ?$$

Legyen $x = \sin(t) = \varphi(t)$, $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t) = \cos(t)$, vagyis $dx = \cos(t) dt$,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \int \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos(t) dt = \int |\cos(t)| \cos(t) dt = \\ &= \int \cos^2(t) dt = \int \frac{\cos(2t) + 1}{2} dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + C \end{aligned}$$

Példa:

Számítsuk ki:

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = ?$$

Legyen $x = \sin(t) = \varphi(t)$, $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t) = \cos(t)$, vagyis $dx = \cos(t) dt$,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \int \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos(t) dt = \int |\cos(t)| \cos(t) dt = \\ &= \int \cos^2(t) dt = \int \frac{\cos(2t) + 1}{2} dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + C \end{aligned}$$

Tudjuk, hogy $t = \arcsin(x)$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\arcsin(x)}{2} + \frac{\sin(\arcsin(x)) \cos(\arcsin(x))}{2} + C$$

Példa:

Számítsuk ki:

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = ?$$

Legyen $x = \sin(t) = \varphi(t)$, $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t) = \cos(t)$, vagyis $dx = \cos(t) dt$,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \int \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos(t) dt = \int |\cos(t)| \cos(t) dt = \\ &= \int \cos^2(t) dt = \int \frac{\cos(2t) + 1}{2} dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + C \end{aligned}$$

Tudjuk, hogy $t = \arcsin(x)$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \frac{\arcsin(x)}{2} + \frac{\sin(\arcsin(x)) \cos(\arcsin(x))}{2} + C \\ &= \frac{\arcsin(x)}{2} + \frac{x\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}}{2} + C \end{aligned}$$

Példa:

Számítsuk ki:

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = ?$$

Legyen $x = \sin(t) = \varphi(t)$, $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t) = \cos(t)$, vagyis $dx = \cos(t) dt$,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \int \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos(t) dt = \int |\cos(t)| \cos(t) dt = \\ &= \int \cos^2(t) dt = \int \frac{\cos(2t) + 1}{2} dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + C \end{aligned}$$

Tudjuk, hogy $t = \arcsin(x)$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \frac{\arcsin(x)}{2} + \frac{\sin(\arcsin(x)) \cos(\arcsin(x))}{2} + C \\ &= \frac{\arcsin(x)}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C \end{aligned}$$

Racionális törtfüggvényre visszavezethető integrálok, $\int R(e^x) dx =$

Számítsuk ki:

$$\int \frac{1}{1 + e^x} dx = ?$$

Racionális törtfüggvényre visszavezethető integrálok, $\int R(e^x) dx =$

Számítsuk ki:

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx = ?$$

Legyen $e^x = t$, $x = \ln(t) = \varphi(t)$, $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t) = \frac{1}{t}$, vagyis $dx = \frac{1}{t} dt$

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx = \int \frac{1}{1+t} \frac{1}{t} dt$$

Racionális törtfüggvényre visszavezethető integrálok, $\int R(e^x) dx =$

Számítsuk ki:

$$\int \frac{1}{1 + e^x} dx = ?$$

Legyen $e^x = t$, $x = \ln(t) = \varphi(t)$, $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t) = \frac{1}{t}$, vagyis $dx = \frac{1}{t} dt$

$$\int \frac{1}{1 + e^x} dx = \int \frac{1}{1 + t} \frac{1}{t} dt$$

Itt,

$$\frac{1}{1 + t} \frac{1}{t} = \frac{A}{1 + t} + \frac{B}{t}$$

$$1 = At + B(1 + t) \rightarrow t = 0 : B = 1, t = -1 : A = -1$$

Racionális törtfüggvényre visszavezethető integrálok, $\int R(e^x) dx =$

Számítsuk ki:

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx = ?$$

Legyen $e^x = t$, $x = \ln(t) = \varphi(t)$, $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t) = \frac{1}{t}$, vagyis $dx = \frac{1}{t} dt$

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx = \int \frac{1}{1+t} \frac{1}{t} dt = \int \frac{-1}{1+t} + \frac{1}{t} dt$$

Itt,

$$\frac{1}{1+t} \frac{1}{t} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{t}$$

$$1 = At + B(1+t) \rightarrow t=0 : B=1, t=-1 : A=-1$$

Racionális törtfüggvényre visszavezethető integrálok, $\int R(e^x) dx =$

Számítsuk ki:

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx = ?$$

Legyen $e^x = t$, $x = \ln(t) = \varphi(t)$, $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t) = \frac{1}{t}$, vagyis $dx = \frac{1}{t} dt$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+e^x} dx &= \int \frac{1}{1+t} \frac{1}{t} dt = \int \frac{-1}{1+t} + \frac{1}{t} dt \\ &= -\ln|1+t| + \ln|t| + C = -\ln(1+e^x) + x + C \end{aligned}$$

Itt,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+t} \frac{1}{t} &= \frac{A}{1+t} + \frac{B}{t} \\ 1 &= At + B(1+t) \rightarrow t=0 : B=1, t=-1 : A=-1 \end{aligned}$$

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx =, \sqrt[n]{ax+b} = t$$

Számítsuk ki:

$$\int \frac{x-3}{(x+1)\sqrt{x-2}} dx = ?$$

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx =, \sqrt[n]{ax+b} = t$$

Számítsuk ki:

$$\int \frac{x-3}{(x+1)\sqrt{x-2}} dx = ?$$

Legyen $\sqrt{x-2} = t$, $x-2 = t^2$, $\varphi(t) = x = t^2 + 2$, $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t) = 2t$,
vagyis $2t dt = dx$

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx =, \sqrt[n]{ax+b} = t$$

Számítsuk ki:

$$\int \frac{x-3}{(x+1)\sqrt{x-2}} dx = ?$$

Legyen $\sqrt{x-2} = t$, $x-2 = t^2$, $\varphi(t) = x = t^2 + 2$, $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t) = 2t$,
vagyis $2t dt = dx$

$$\int \frac{x-3}{(x+1)\sqrt{x-2}} dx = \int \frac{t^2-1}{(t^2+3)t} 2t dt$$

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx =, \sqrt[n]{ax+b} = t$$

Számítsuk ki:

$$\int \frac{x-3}{(x+1)\sqrt{x-2}} dx = ?$$

Legyen $\sqrt{x-2} = t$, $x-2 = t^2$, $\varphi(t) = x = t^2 + 2$, $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t) = 2t$,
vagyis $2t dt = dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{x-3}{(x+1)\sqrt{x-2}} dx &= \int \frac{t^2-1}{(t^2+3)t} 2t dt \\ &= 2 \int \frac{t^2+3-4}{t^2+3} dt = 2 \int 1 - \frac{4}{t^2+3} dt = 2 \int 1 - \frac{4}{3} \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2} dt \end{aligned}$$

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx =, \sqrt[n]{ax+b} = t$$

Számítsuk ki:

$$\int \frac{x-3}{(x+1)\sqrt{x-2}} dx = ?$$

Legyen $\sqrt{x-2} = t$, $x-2 = t^2$, $\varphi(t) = x = t^2 + 2$, $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t) = 2t$,
vagyis $2t dt = dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{x-3}{(x+1)\sqrt{x-2}} dx &= \int \frac{t^2-1}{(t^2+3)t} 2t dt \\ &= 2 \int \frac{t^2+3-4}{t^2+3} dt = 2 \int 1 - \frac{4}{t^2+3} dt = 2 \int 1 - \frac{4}{3} \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2} dt \\ &= 2t - \frac{8}{3} \frac{\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{3}}} + C = 2\sqrt{x-2} - \frac{8}{\sqrt{3}} \arctan \sqrt{\frac{x-2}{3}} + C \end{aligned}$$